



TITLE:

# アフィン変換下での不変積分量を用いたパターン認識 (数式処理と教育)

AUTHOR(S):

和賀, 宗仙

---

CITATION:

和賀, 宗仙. アフィン変換下での不変積分量を用いたパターン認識 (数式処理と教育). 数理解析研究所講究録 2010, 1674: 146-158

ISSUE DATE:

2010-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/141206>

RIGHT:

# アフィン変換下での不変積分量を用いたパターン認識

福島工業高等専門学校・モノづくり教育研究支援センター 和賀 宗仙 (Toshinori Waga)  
Manufacturing Support Center for Education and Research,  
Fukushima National College of Technology

## 1 背景

我々が何か2つの物体を認識したとき、それらが同じ物体かどうかをどのようにして判別するかが問題となる。

例として、図1左の「A」という文字をコピー機で複写したとき、紙の置き方やコピー機の設定によって一般には一様拡大，縦横伸縮，平行移動，回転を合成したアフィン変換を伴って出力される（図1右）。図1右が図1左からコピーされたものであることを判別する計算機を実現するには、アフィン変換をしても同じ実数値を吐き出すような、画像情報を利用した何らかの式があると便利である。

本稿では  $n$  次元 Euclid 空間上での滑らかな関数を  $f$  とし、 $f$  の外微分とヘッセ行列を用いてアフィン変換下での不変積分量を定義した。 $n = 1$ ，すなわち1次元の場合はひもの上に1色のペンを塗ったときの濃淡の分布が  $f(x)$  であると考えられる。 $n = 2$ ，すなわち2次元の場合が、我々にとってなじみ深いグレースケール画像に相当し、 $f(x, y)$  が濃度分布である。コンピュータ上では通常、 $f(x, y) = 0$  になる点は真っ黒で、 $f(x, y) = 255$  の点が真っ白であり、濃度  $f(x, y)$  は  $0 \sim 255$  の整数値をとる。定義した積分式は  $C^2$  級関数  $f(x, y)$  に対して定義されているため、画像上の濃度分布は滑らかであることが要求される。本稿では最も簡単な滑らかな濃度分布の例として、点や直線をガウス関数でぼかした曖昧点や曖昧直線について考察する。

なお、本研究は福島高専にて平成15年度から平成18年度にわたって第6代校長を務めた安久正紘名誉教授によって立ち上げられた。安久教授のアイディアは、アフィン変換下での不変式を2つ用意したあと、一方を任意関数の引数とし、もう一方の不変式を打ち消すように適切に任意関数を設定することで簡易な不変積分量を編み出したという点で画期的である。このアイディアをコンピュータ上での画像に応用するべく、福島高専一般教科数学科の井川治准教授とモノづくり教育研究支援センター技術職員の和賀が引き継いでいる。

## 2 アフィン変換で不変な汎関数

$\mathbf{R}^n$  で  $n$  次元 Euclid 空間を表す。 $\mathbf{R}^n$  の元を列ベクトルで表示する。 $GL^+(n, \mathbf{R})$  で  $\mathbf{R}^n$  の向きを保つ正則一次変換全体のなす群を表す。

$GL^+(n, \mathbf{R})$  は行列式が正の  $n$  次実正方行列の全体である。

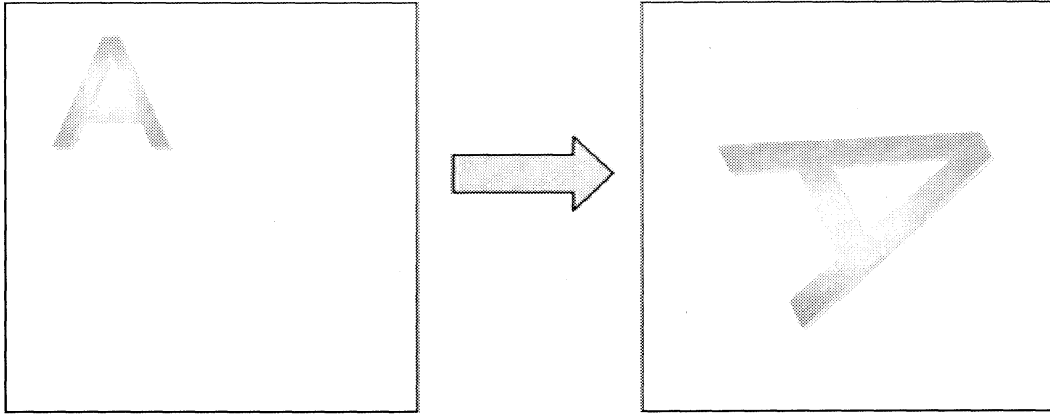


図 1: アフィン変換を伴って出力するコピー機の例

$T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  が向きを保つアフィン変換であるとは,  $A \in GL^+(n, \mathbf{R})$  と  $B \in \mathbf{R}^n$  が存在して

$$T(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbf{R}^n) \quad (3)$$

となるときを言う.

向きを保つアフィン変換全体は群をなす. これを向きを保つアフィン変換群といい,  $A^+(n)$  と表す.  $A^+(n)$  は  $GL^+(n, \mathbf{R})$  と  $\mathbf{R}^n$  との半直積になる:

$$A^+(n) = GL^+(n, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$$

$C^\infty(\mathbf{R}^n)$  で  $\mathbf{R}^n$  上の滑らかな関数全体のなす加群を表す.  $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$  の外微分  $df$  とヘッセ行列と呼ばれる  $n$  次対称行列  $Hf$  を次で定義する.

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad Hf = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

更に

$$C_H^\infty(\mathbf{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^n) \mid Hf \in GL(n, \mathbf{R})\}$$

とおく.  $f \in C_H^\infty(\mathbf{R}^n)$  に対して  $Hf$  は

$$(Hf) \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

とおくことにより  $\mathbf{R}^n$  上の semi-Riemann 計量  $\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$  を定める.

$C^\infty(\mathbf{R}^n)$  上に次で同値関係  $\sim$  を導入する. 以下の同値関係は二つの画像パターン  $f, \tilde{f}$  が同じものを表しているということの一つの定式化である.  $f, \tilde{f} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$  に対して  $f \sim \tilde{f}$  とは, ある向きを保つアフィン変換  $T \in A^+(n)$  が存在して

$$f = \tilde{f} \circ T. \quad (4)$$

このとき,  $x' = Tx = Ax + B$ ,  $A = (a_{ij})$  とおくと

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x'_j} \circ T \right) \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} = \sum_j a_{ji} \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x'_j} \circ T \right)$$

が成り立つ. これより  $f, \tilde{f}$  の外微分に関して

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x'_1} \circ T \\ \vdots \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x'_n} \circ T \end{pmatrix} = A^t (d\tilde{f} \circ T) \quad (5)$$

が成り立つ. ここで  $A^t$  で  $A$  の転置行列を表した.  $f, \tilde{f}$  のヘッセ行列に関しては

$$Hf = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) = A^t \left( \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x'_i \partial x'_j} \circ T \right) A = A^t (H\tilde{f} \circ T) A \quad (10)$$

が成り立つ. 特に  $f \in C_H^\infty(\mathbf{R}^n) \Leftrightarrow \tilde{f} \in C_H^\infty(\mathbf{R}^n)$  となる.

**定義 1.**  $F : C_H^\infty(\mathbf{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R}^n)$  が向きを保つアフィン変換に関して同変であるとは,  $f = \tilde{f} \circ T$  ( $f, \tilde{f} \in C_H^\infty(\mathbf{R}^n), T \in A^+(n)$ ) ならば  $F(f) = F(\tilde{f}) \circ T$  となることを言う.

$\wedge^n(\mathbf{R}^n)$  で  $\mathbf{R}^n$  上の  $n$  次微分形式全体のなす加群を表す.

**定義 2.**  $I : C_H^\infty(\mathbf{R}^n) \rightarrow \wedge^n(\mathbf{R}^n)$  が向きを保つアフィン変換の不変量であるとは,  $\tilde{f} \sim f$  となる  $f, \tilde{f} \in C_H^\infty(\mathbf{R}^n)$  に対して  $I(f) = T^* I(\tilde{f})$  となることを言う. 但し,  $f = \tilde{f} \circ T$ .

上のとき, 微分形式の積分に関して

$$\int I(f) = \int I(\tilde{f})$$

が成り立つ.

一般に,  $n$  次実対称行列  $S$  の定める 2 次形式を  $Q_S$  と表す:

$$Q_S(x) = x^t S x \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

このとき, 次の定理が成り立つ.

**定理 3.**

$$F : C_H^\infty(\mathbf{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R}^n); f \mapsto Q_{(Hf)^{-1}}(df)$$

は向きを保つアフィン変換に関して同変である.

**証明**  $f = \tilde{f} \circ T, Tx = Ax + B$  と仮定する. (5) と (10) より

$$\begin{aligned} F(f) &= (df)^t (Hf)^{-1} (df) \\ &= ((d\tilde{f})^t \circ T) A A^{-1} ((H\tilde{f}^{-1} \circ T)(A^t)^{-1} A^t (d\tilde{f} \circ T)) \\ &= ((d\tilde{f})^t \circ T) ((H\tilde{f})^{-1} \circ T) (d\tilde{f} \circ T) \\ &= F(\tilde{f}) \circ T \end{aligned}$$

よって  $F(f) = F(\tilde{f}) \circ T$  となる.

$|Hf|$  の第  $i$  列を列ベクトル  $df$  で置き換えた行列式を  $\Delta_i$  で表すと Cramer の公式より

$$F(f) = \frac{1}{|Hf|} \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta_i \quad (11)$$

が成り立つ.

semi-Riemann 計量  $Hf$  ( $f \in C_H^\infty(\mathbf{R}^n)$ ) の定める体積要素

$$|\det(Hf)|^{1/2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

について次が成り立つ.

定理 4.

$$I : C_H^\infty(\mathbf{R}^n) \rightarrow \bigwedge^n(\mathbf{R}^n); f \mapsto |\det(Hf)|^{1/2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

は向きを保つアフィン変換の不変量である.

証明  $f = \tilde{f} \circ T, x' = Tx = Ax + B$  とする. このとき,

$$T^*(dx'_1 \wedge \cdots \wedge dx'_n) = (\det A) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad (12)$$

(10) 式の両辺の行列式の絶対値の平方根を計算し,

$$|\det(Hf)|^{1/2} = \det A |\det((H\tilde{f}) \circ T)|^{1/2}.$$

よって

$$\begin{aligned} I(f) &= |\det(Hf)|^{1/2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= |\det((H\tilde{f}) \circ T)|^{1/2} T^*(dx'_1 \wedge \cdots \wedge dx'_n) \\ &= T^*(|\det(H\tilde{f})|^{1/2} dx'_1 \wedge \cdots \wedge dx'_n) \\ &= T^*I(\tilde{f}) \end{aligned}$$

よって主張が成り立つ.

定理 3 と定理 4 から直ちに次が得られる.

系 5.  $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$  を任意の関数とすると  $\varphi(F(f))I(f)$  は向きを保つアフィン変換の不変量である.

証明  $f = \tilde{f} \circ T$  と仮定すると定理 3 と定理 4 より

$$F(f) = F(\tilde{f}) \circ T, \quad I(f) = T^*I(\tilde{f}).$$

よって

$$\varphi(F(f))I(f) = \varphi(F(\tilde{f}) \circ T)T^*I(\tilde{f}) = T^*(\varphi(F(\tilde{f}))I(\tilde{f}))$$

例 6.  $f = f(r)$ ,  $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$  のとき,

$$|Hf| = \frac{f''(r)(f'(r))^{n-1}}{r^{n-1}}, \quad F(f) = \frac{(f'(r))^2}{f''(r)}.$$

証明

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} f'(r)$$

なので (11) より

$$F(f) = \frac{f'(r)}{r|Hf|} \sum x_i \Delta_i.$$

$|Hf|$  の第  $i$  列を  $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$  に置き換えた行列式を  $D_i$  と表すと  $\Delta_i = \frac{f'(r)}{r} D_i$  となるので

$$F(f) = \frac{(f'(r))^2}{r^2|Hf|} \sum x_i D_i.$$

ここで

$$\sum x_i D_i = \frac{(f'(r))^{n-1}}{r^{n-3}}, \quad |Hf| = \frac{f''(r)(f'(r))^{n-1}}{r^{n-1}}$$

となることを示せば証明が完了する.

$$Hf = \left( \delta_{ij} \frac{f'(r)}{r} + x_i x_j \frac{r f''(r) - f'(r)}{r^3} \right)$$

となるので  $|Hf|$  の第  $j$  列は

$$\frac{f'(r)}{r} e_j + \frac{r f''(r) - f'(r)}{r^3} x_j x.$$

ここで  $e_j$  は  $j$  行目が 1 で他の成分が 0 である  $n$  次列ベクトルである. ゆえに

$$|Hf| = \left| \frac{f'(r)}{r} e_1 + \frac{r f''(r) - f'(r)}{r^3} x_1 x, \dots, \frac{f'(r)}{r} e_n + \frac{r f''(r) - f'(r)}{r^3} x_n x \right|$$

行列式の性質を用いると  $|Hf|$  は  $\frac{(f'(r))^n}{r^n}$  と

$$\sum \left| \frac{f'(r)}{r} e_1, \dots, \frac{f'(r)}{r} e_{i-1}, \frac{r f''(r) - f'(r)}{r^3} x_i x, \frac{f'(r)}{r} e_{i+1}, \dots, \frac{f'(r)}{r} e_n \right|$$

の和になる. この第二項を変形すると

$$\sum \frac{(f'(r))^{n-1}}{r^{n-1}} \cdot \frac{r f''(r) - f'(r)}{r^3} x_i^2 = \frac{(f'(r))^{n-1}}{r^n} (r f''(r) - f'(r)).$$

ゆえに

$$|Hf| = \frac{(f'(r))^n}{r^n} + \frac{(f'(r))^{n-1}}{r^n} (r f''(r) - f'(r)) = \frac{f''(r)(f'(r))^{n-1}}{r^{n-1}}.$$

行列式の性質を用いて

$$\begin{aligned} \sum x_i D_i &= \sum x_i \begin{vmatrix} \frac{f'(r)}{r} & & & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \frac{f'(r)}{r} & x_{i-1} \\ & & & x_i \\ & & & x_{i+1} & \frac{f'(r)}{r} \\ & & & \vdots & \ddots \\ & & & x_n & & \frac{f'(r)}{r} \end{vmatrix} \\ &= \sum x_i^2 \frac{(f'(r))^{n-1}}{r^{n-1}} = \frac{(f'(r))^{n-1}}{r^{n-3}} \end{aligned}$$

ゆえに主張が示された。

例えば  $f(r) = \exp(-\lambda \frac{r^2}{2})$  のときは,

$$F(f) = \frac{\lambda r^2 \exp(-\lambda \frac{r^2}{2})}{\lambda r^2 - 1}$$

となる。これを応用すると次の例が得られる。

例 7.  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  を正の定数とする。

$$f(x_1, \dots, x_n) = \exp\left(\lambda \frac{\sum \alpha_i x_i^2}{2}\right)$$

のとき,

$$F(f) = \frac{\lambda \sum \alpha_i x_i^2 \exp\left(-\lambda \frac{\sum \alpha_i x_i^2}{2}\right)}{\lambda \sum \alpha_i x_i^2 - 1}.$$

証明

$$\tilde{f}(y_1, \dots, y_n) = \exp\left(-\lambda \frac{\sum y_i^2}{2}\right), \quad y_i = \sqrt{\alpha_i} x_i$$

とおくと  $f(x_1, \dots, x_n) = \tilde{f}(\sqrt{\alpha_1} x_1, \dots, \sqrt{\alpha_n} x_n)$ . 定理 3 を用いて

$$\begin{aligned} F(f) &= F(\tilde{f}) = \frac{\lambda \sum y_i^2 \exp\left(-\lambda \frac{\sum y_i^2}{2}\right)}{\lambda \sum y_i^2 - 1} \\ &= \frac{\lambda \sum \alpha_i x_i^2 \exp\left(-\lambda \frac{\sum \alpha_i x_i^2}{2}\right)}{\lambda \sum \alpha_i x_i^2 - 1} \end{aligned}$$

### 3 2次元グレースケール画像への適用

$f = f(x_1, x_2)$  を平面上の 2 次元グレースケール画像濃度データとし,  $\varphi$  を任意の関数とすると, 系 5 より

$$L = \int \int \varphi(F(f)) I(f) dx_1 dx_2$$

は向きを保つアフィン変換の不変量になる． $\varphi(x) = \sqrt{|x|}$  のときに，この  $L$  を具体的に表示すると

$$L = \int \int \sqrt{|(f_x)^2 f_{yy} + (f_y)^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy}|} dx dy \quad (13)$$

但し， $x_1 = x, x_2 = y$  とおいた．

**補題 8.**  $\varphi(x) = \sqrt{|x|}$  とする．平面上の曖昧点  $f(r) = \exp(-r^2)$  に対して

$$L = \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}}$$

この値は約 4.28 である．

**証明**  $f_r = -2rf$  なので  $|f_r(r)|^{3/2} = 2^{3/2}r^{3/2} \exp(-\frac{3}{2}r^2)$ ．よって

$$\begin{aligned} L &= 4\sqrt{2}\pi \int_0^\infty r^2 \exp\left(-\frac{3}{2}r^2\right) dr \\ &= 4\sqrt{2}\pi \left(-\frac{1}{3}\right) \int_0^\infty r \left(\exp\left(-\frac{3}{2}r^2\right)\right)' dr \\ &= -\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi \left(\left[r \exp\left(-\frac{3}{2}r^2\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \exp\left(-\frac{3}{2}r^2\right) dr\right) \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(13) によって定義される不変量を曖昧点  $f(r) = \exp(-r^2)$  に対して 1 になるようにスケール変換すると

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi\sqrt{\pi}} \int \int \sqrt{|(f_x)^2 f_{yy} + (f_y)^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy}|} dx dy \quad (14)$$

## 4 関数 $f$ の簡約化

ところで， $Hf$  が正則でない点が存在するとき，その点では  $F(f)$  が定義できず，応用上不便になる．しかしながら，以下に述べる簡約化 (reduction) の手続きをとることにより， $F(f)$  の代用品  $F_{\text{red}}(f)$  を定義できる場合がある．

簡約化のアイデアは  $r$  変数 ( $r < n$ ) の関数  $\varphi(x_1, \dots, x_r)$  は

$$f(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_r)$$

とおくことにより， $x_{r+1}, \dots, x_n$  に無関係な  $n$  変数関数  $f$  とみなすことができる，ということである．この考えを一般化して次のように定義する．



一般に  $n$  変数関数  $f(x)$  が簡約化可能 (reductive) であるとは,  $n$  次元 Euclid 空間  $\mathbf{R}^n$  の直和分解

$$\mathbf{R}^n = V \oplus W \quad (\dim V \geq 1, \dim W \geq 1)$$

と  $V$  上の関数  $\varphi$  が存在して  $f = \varphi \circ \pi$  となる場合を言う. 但し,  $\pi: V \oplus W \rightarrow V; x \oplus y \mapsto x$  で自然な射影を表した.

$f$  が簡約化可能ならば  $|Hf| = 0$  が成り立つ.

$f$  が簡約化可能で  $\tilde{f} \sim f$  ならば  $\tilde{f}$  も簡約化可能であることを示そう. 仮定より

$$\varphi \circ \pi = f = \tilde{f} \circ T + C, \quad T = (A, B)$$

となっている.

$$\mathbf{R}^n = AV \oplus AW$$

と直和分解すると  $\mathbf{R}^n$  の  $AV$  への自然な射影  $\tilde{\pi}$  は  $\tilde{\pi} = A \circ \pi \circ A^{-1}$  によって与えられる.  $AV$  上の関数  $\tilde{\varphi}$  を

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(A^{-1}x - \pi A^{-1}B)$$

と定めると簡単な計算により  $\tilde{f} = \tilde{\varphi} \circ \tilde{\pi}$  が成り立つ. ゆえに  $\tilde{f}$  も簡約化可能である.

以下,  $f$  が  $\varphi$  に簡約化可能で  $\partial^2 \varphi$  は非退化であると仮定する.  $V$  の基底  $\{u_1, \dots, u_r\}$  をとり,  $V$  上の関数  $\varphi$  を

$$\varphi(x_1, \dots, x_r) = \varphi\left(\sum x_i u_i\right)$$

とおくことにより  $r$  変数関数とみる.  $F_{\text{red}}$  を

$$F_{\text{red}}(f) = F(\varphi) \circ \pi$$

と定義する. このとき,  $F_{\text{red}}(f) = F_{\text{red}}(\tilde{f})$  が成り立つ. よって  $F_{\text{red}}(f)$  は  $F(f)$  の代用品であると考えられる.

ここで  $n$  次元 Euclid 空間内の「曖昧超平面」(vague hyperplane)

$$f(x_1, \dots, x_n) = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - c_i)\right)^2\right) \quad (\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0) \quad (15)$$

について考察する.  $n = 2$  のとき,  $f$  は「曖昧直線」(vague line) と呼ばれる. 曖昧超平面  $f$  に対して  $|Hf| = 0$  となるので  $F(f) = 0$  を定義することはできない. しかしながら  $f$  は簡約化可能であり,  $F_{\text{red}}(f)$  を定義することが出来る. 以下, これを示そう. 直感的には  $f$  は芯に当たる超平面  $\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - c_i) = 0$  の法線  $\alpha$  の方向の値で完全に決まる, ということである.  $n$  次元 Euclid 空間  $\mathbf{R}^n$  の  $n-1$  次元部分空間  $W$  と 1 次元部分空間  $V$  を

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) | (\alpha, x) = 0\}, \quad V = \mathbf{R}\alpha \quad \text{但し} \quad (\alpha, x) = \sum \alpha_i x_i$$

と定めると  $\mathbf{R}^n = W \oplus V$ .  $\pi$  で  $\mathbf{R}^n$  から  $V$  への自然な射影を表すと

$$\pi(x) = \frac{(\alpha, x)}{\|\alpha\|^2} \alpha \quad \text{但し} \quad \|\alpha\|^2 = \sum \alpha_i^2$$

表 1: Mathematica による曖昧点の不変積分値計算

$f(x, y)$	積分値
$\exp[-(x^2 + y^2)]$	4.2865
$\exp[-(4x^2 + 9y^2)]$	4.2865
$\exp[-((x + y)^2 + (x - y)^2)]$	4.2865
$\exp[-((2x + y)^2 + (x - y)^2)]$	4.2865
$\exp[-((2x + y + 1)^2 + (x - y + 2)^2)]$	4.2865

$V$  上の関数  $\varphi$  を

$$\varphi(t) = \varphi(t\alpha) = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\|\alpha\|^4\left(t - \frac{(\alpha, c)}{\|\alpha\|^2}\right)^2\right) \quad \text{但し } c = (c_1, \dots, c_n)$$

と定めると  $f = \varphi \circ \pi$  となるので  $f$  は  $\varphi$  に簡約化可能である。よって  $F_{\text{red}}(f)$  を定義することができるが、

$$F_{\text{red}}(f) = \frac{\lambda^2(\alpha, x - c)^2}{\lambda^2(\alpha, x - c)^2 - 1} f$$

となる。

## 5 Mathematica による不変性の確認

補題 8 を数値積分にて確認する。まず、Mathematica で  $f(r) = \exp(-r^2) = \exp(-x^2 - y^2)$  に対し (13) 式の計算をする。その後、 $x, y$  に対しいくつかのアフィン変換を行って数値積分をし、値がいずれも約 4.28 になっていることを示すのが表 1 である。

## 6 離散式による積分

(14) 式に出てくる偏導関数と積分式を以下のように刻み幅  $d$  で離散化する。

$$\begin{aligned}
f(x, y) &: \text{濃度値} \\
f_x(x, y) &= \frac{f(x + d, y) - f(x - d, y)}{2d} \\
f_y(x, y) &= \frac{f(x, y + d) - f(x, y - d)}{2d} \\
f_{xy}(x, y) &= \frac{f(x + d, y + d) - f(x - d, y + d) - f(x + d, y - d) + f(x - d, y - d)}{4d^2} \\
f_{xx}(x, y) &= \frac{f(x + d, y) - 2f(x, y) + f(x - d, y)}{d^2} \\
f_{yy}(x, y) &= \frac{f(x, y + d) - 2f(x, y) + f(x, y - d)}{d^2} \\
L &= \sum_{x, y} |f_x^2 f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{xx}|^{1/2} d^2
\end{aligned} \tag{16}$$

表 2: 刻み幅  $d$  を変化させながら曖昧点に対して計算した不変積分量

刻み幅	$x, y$ 方向のサンプル点数	積分値
0.01	600	6442
0.02	300	4441
0.03	200	4164
0.04	150	4102
0.05	120	4072
0.06	100	4073
0.07	85.7	4065
0.08	75	4058
0.09	66.7	4055
0.10	60	4052
0.11	54.5	4045
0.12	50	4039
0.13	46.2	4032
0.14	42.9	4028
0.15	40	4019
0.16	37.5	4015

実際のグレースケール画像では濃度地が  $0 \sim 255$  の整数値となるので、ここではそれにあわせ

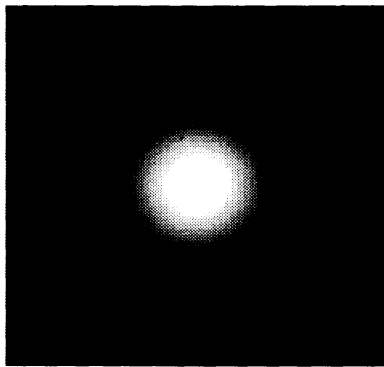
$$f(x, y) = \text{ROUND}[255 \exp(-x^2 - y^2)] \quad (17)$$

を例として実際にコンピュータで離散積分を試みる．ただし  $\text{ROUND}[\cdot]$  は小数点第 1 位での四捨五入を意味する．この  $f(x, y)$  に対し (14) の離散形

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi\sqrt{\pi}} \sum_{x,y} |f_x^2 f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{xx}|^{1/2} d^2 \quad (18)$$

の値を、刻み幅  $d$  を変化させながら計算した結果を示す．なお、理論値は  $255^{2/3} \simeq 4072$  である．

通常のコンピュータでの数値積分から考えると、刻み幅は細かいほうがよいと考えるが、今回の場合はそうではない．(17) 式のように関数の値域を整数値に丸め込んでいる場合、刻み幅を細かくしても間にあるさらに細かい関数値を取り出すことができず、それが各点での偏導関数の値に誤差を与え、(18) 式の誤差として累積していくのである．このような事情で、表 2 の場合、 $d = 0.05$  程度がほどよい刻み幅の値という結果になっている．



```

d = 0.1
x = 0: y = 0
For i = 0 To 6 Step d
  For j = 0 To 6 Step d
    InData(x, y) = GraphFunc(-3 + i, -3 + j)
    y = y + 1
  Next j
  x = x + 1
Next i
CreateBMP "C:\temp.bmp", InData(), 61, 61
Image1.Picture = LoadPicture("C:\temp.bmp")
End Sub

```

```

Function GraphFunc(x As Double, y As Double) As Byte
  GraphFunc = WorksheetFunction.Round(255 * Exp(-(x ^ 2 + y ^ 2)), 0)
End Function

```

図 2: 刻み幅 0.1 で  $x, y$  を  $-3 \sim +3$  まで動かしプロットした曖昧点画像

## 7 曖昧点画像に対する不変量計算

実際の 2 次元グレースケール画像では、刻み幅がピクセル単位であるから、(16) 式に  $d = 1\text{pixel}$  を代入した次式が適用される。

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &: \text{濃度値} \\
 f_x(x, y) &= \frac{f(x+1, y) - f(x-1, y)}{2} \\
 f_y(x, y) &= \frac{f(x, y+1) - f(x, y-1)}{2} \\
 f_{xy}(x, y) &= \frac{f(x+1, y+1) - f(x-1, y+1) - f(x+1, y-1) + f(x-1, y-1)}{4} \\
 f_{xx}(x, y) &= f(x+1, y) - 2f(x, y) + f(x-1, y) \\
 f_{yy}(x, y) &= f(x, y+1) - 2f(x, y) + f(x, y-1) \\
 L &= \sum_{x,y} |f_x^2 f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{xx}|^{1/2}
 \end{aligned} \tag{19}$$

図 2 は、(17) 式を、刻み幅 0.1 で  $x, y$  を  $-3 \sim +3$  まで動かしプロットして生成した  $61 \times 61$  の曖昧点画像である。これは曖昧点の中心に関して点対称の画像であるから、回転させても我々の目には違いがなく映る。ところが、図 2 の画像とこれを 45 度反時計まわりに回転させた画像に対し (18) 式に  $d = 1\text{pixel}$  を代入した

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi\sqrt{\pi}} \sum_{x,y} |f_x^2 f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{xx}|^{1/2} \tag{20}$$

の値を計算すると、それぞれ 4045 と 8420 になった。実際に回転画像を生成する際には、回転移動先の座標値を整数値に丸め込むことにより、(20) 式に誤差を蓄積していくことになる。表 1 では  $f(x, y)$  が連続関数の形で具体的にわかっている場合について Mathematica で数値積分しているので、コンピュータ側で適切な刻み幅を設定し、それに応じて  $f(x, y)$  の細かい値域の値を計算により取り出すことができるため、誤差が生

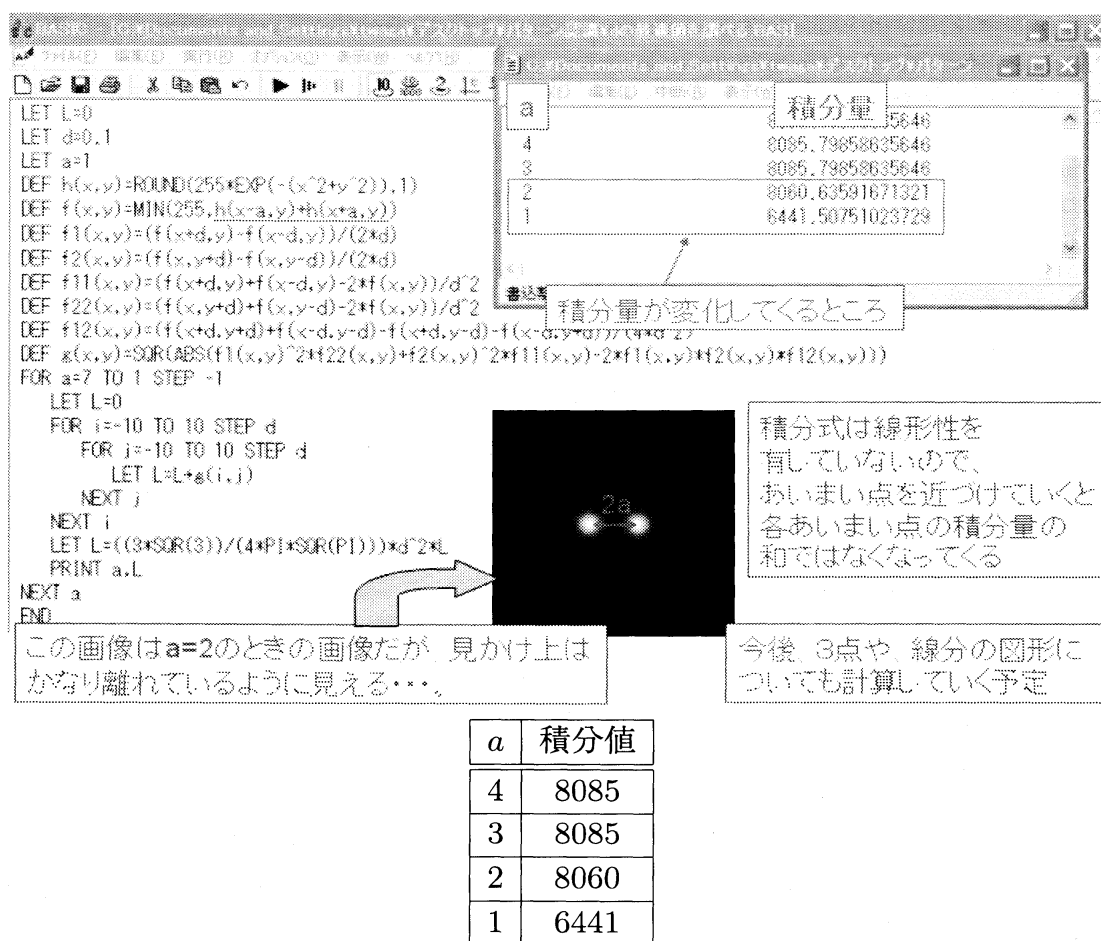


図 3: 2つの曖昧点画像を近づけていった場合

じなかったと考えられ、 $f(x, y)$  の値を整数値に丸め込むか否かという差が明確に現れている。

## 8 2つの曖昧点を近づけた場合

(13) 式には二階偏導関数が含まれているので、濃度値  $f(x, y)$  は二階偏微分可能な連続関数であることが求められる。2次元グレースケール画像に対して不変量を計算する際、そのような連続関数に近い形にするためにあらかじめ画像をぼかしておく必要がある。そのとき、最初離れていた2点がぼかしにより広がって互いに干渉しあう状況が予想される。

図3は、2つの曖昧点画像を距離  $2a$  だけ離れた位置に置き、加算合成した画像である。 $a$  をだんだん小さくしながら、曖昧点がどの程度近づいたら干渉しあうのかを観測している。2点が十分離れている場合は、単純に不変量は2倍になるが、互いに干渉した場合、(20) 式は  $f(x, y)$  に関して線形ではないため、今回の場合は  $a = 2$  あたりから徐々に違った値をとっている。人間の眼からは十分離れているように見えても、ぼかすことに

よって干渉をうけている場合があることに注意する必要がある。

## 9 まとめ

$n$  次元 Euclid 空間上でのアフィン変換下での不変積分量を定義し、 $n = 2$  の場合について

1. 曖昧点関数に対する Mathematica での数値積分
2. 刻み幅  $d$  による偏導関数の定義と離散積分
3. グレースケール画像に対する不変積分量計算

を行った。濃度分布を表す  $f(x, y)$  が連続な実関数として具体的に初等関数の形でわかっている場合には、1 で不変性を確認できた。2, 3 では濃度値が 0~255 の整数値に丸め込まれているため偏導関数に誤差を与え、不変積分量に誤差が累積していくことが確認された。そのため、2 では  $d$  を細かくとればとるほどよいわけではないこと、3 では見ただけでは差がわからないほど似通った画像ですら不変性が崩れてしまうことが確かめられた。以上から、グレースケール画像の濃度分布を一度、遠方で 0 に収束するような何らかの連続関数で近似してから Mathematica で数値積分すればよいのではないかと考えている。連続関数へのあてはめとして Mathematica には Fit 関数があるが、画像全体に対して使用しようとするメモリパンクエラーが起きた。したがって、画像をいったん小領域に分割するべきと考えているが、そのときは分割境界で連続性を保つことを保証する必要がある。また、画像は滑らかな濃度分布でなければいけないため、ぼかし処理をしておく必要があるが、そのときに離れていた点同士が広がり互いに干渉する可能性がある。不変積分量の式は関数  $f(x, y)$  に関して線形でないため、そのことが積分量の値に影響を与えることになる。今回は 2 つの曖昧点がどの程度近づいたら干渉が観測されるかを計算し、見かけ上十分離れているように見えても干渉が起きている場合があることが確かめられた。

## 参考文献

- [1] T. Iijima, "Theory of pattern recognition," IEICE Trans., vol.46, no.11, pp.1582-1591, 1963.
- [2] N. Otsu, "Theory of invariant feature extraction," IEICE Trans., vol.69, no.5, 1986.
- [3] H. Haken, "Information and Self-organization," Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [4] M. Agu and S. Yobiko, "Invariant quantity for rotation and uniform dilatation of pattern using gradient and curvature of its gray level," IEICE Trans., vol.J65-D-II, no.11, pp.2456-2458, 1993.
- [5] M. Agu, M. Yamada and A. D. Shoffer, "A Field Theory of Pattern Identification Using the Concept of Gauge Field", IEICE Trans. Inf. Syst. vol. E81-0, no. 2, Feb. 1998, pp. 206-214.